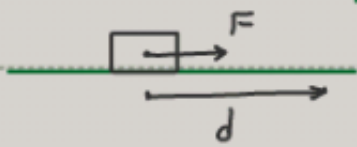


مفهوم کار از نظر تعاریف: اگر بر جسم نیرو وارد شود و جسم در اثر نیرو جابجا شود، می‌گوییم کار انجام شده است.

نیرو {
۱- ثابت
۲- متغیر

الف) محاسبه کار نیروی ثابت: ۱- اگر نیرو با جابجایی هم جهت باشد، حاصل ضرب مقدار

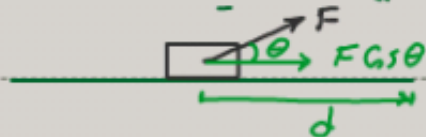
نیرو در اندازه جابجایی برابر کار است.



$$W = Fd$$

و واحد کار برابر ژول است. $J = N \cdot m$

۲- اگر نیرو و جابجایی هم جهت نباشند: کار برابر است با حاصل ضرب مقدار جابجایی در تصویر نیرو در راستای جابجایی

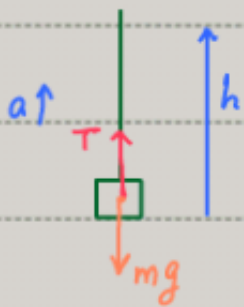


$$W = F \cos \theta d = Fd \cos \theta = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

کار حاصل ضرب داخلی بردار نیرو در بردار جابجایی است (کار یک کمیت زده ای است).

مثال ۱- توسط ضایبی یک جسم به جرم 20 kg را با شتاب 2 m/s^2 از نقطه ای به اندازه 8 m بالا می‌کشیم.

کار وزن و کار نیروی کشش را محاسبه کنید.



$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow T - mg = ma \rightarrow T = ma + mg = 240 \text{ N}$$

$$W_g = \vec{m}\vec{g} \cdot \vec{h} = mgh \cos 180^\circ = 200(8)(-1) = -1600 \text{ J}$$

$$W_T = \vec{T} \cdot \vec{h} = Th \cos 0^\circ = 240(8)(1) = 1920 \text{ J}$$

از رابطه $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$ ملاحظه می‌شود که اگر زاویه میان نیرو و جابجایی $0^\circ < \theta < 90^\circ$ در این صورت $W > 0$ و نیرو

محرک است. اگر $\theta = 90^\circ$ $W = 0$ (هر نیرویی که بر جابجایی عمود باشد، کار انجام نمی‌دهد).

اگر $90^\circ < \theta < 180^\circ$ $W < 0$ و نیرو متضام است.

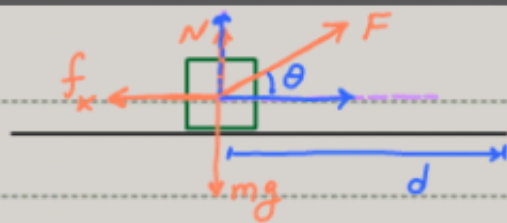
در مثال بالا، نیروی کشش تخ یک نیروی محرکه و نیروی وزن یک نیروی متضام است.

اگر چند نیرو بر جسمی اثر کنند، کل کار برابر است با مجموع حیرت کار هر یک از نیروها: $W_T = \Sigma W_i$ یا

$$W_T = \Sigma \vec{F}_i \cdot \vec{d}$$

مثال ۲- جسی به جرم 10 kg روی سطح افقی به ضرب اصطکاک $\mu = 0.3$ توسط نیروی 80 N که با افق زاویه 37°

به بالا می‌سازد، به اندازه 20 m کشیده می‌شود. کار هر یک از نیروهای وارد بر جسم و کار کل را محاسبه کنید.



$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

با استفاده از رابطه کار:

نیروی وزن و نیروی سطح بر جایابی عمودند؛ $W_{mg} = W_N = 0$

$$W_F = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos \theta = 100(20) \cos(37) = 1400(0.8) = 1120 \text{ ج}$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N + F \sin \theta - mg = 0 \rightarrow N = mg - F \sin \theta = 100 - 100(0.6) = 40 \text{ N}$$

$$f_k = \mu_k N = 0.3(40) = 12 \text{ N}$$

$$W_{f_k} = f_k d \cos(180) = 12(20)(-1) = -240 \text{ ج}$$

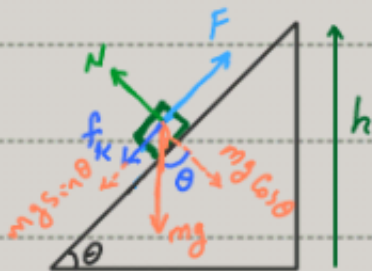
$$W_t = \Sigma W_i = 1120 - 240 = 880 \text{ ج}$$

مثال ۳- جسم به جرم 15 kg از یک سطح شیب 53° و ضریب اصطکاک 0.4 توسط نیروی به موازات سطح شیب

با شتاب 2 m/s^2 بالا کشیده می شود. اگر ارتفاع سطح شیب 4 m باشد.

الف) بارش نمودار آزاد، نیروی وارد بر جسم را بدست آورید.

ب) کار هر یک از نیروها را محاسبه کرده و کل کار را بدست آورید.



$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \begin{cases} \Sigma F_y = 0 \rightarrow N - mg \cos \theta = 0 \rightarrow N = mg \cos \theta = 150(0.6) = 90 \text{ N} \\ \Sigma F_x = ma \rightarrow F - mg \sin \theta - f_k = ma \end{cases}$$

$$f_k = \mu_k N = 0.4(90) = 36 \text{ N}$$

$$F = ma + mg \sin \theta + f_k \rightarrow F = 30 + 150(0.8) + 36 \rightarrow F = 186 \text{ N}$$

$$\sin \theta = \frac{h}{d} \rightarrow d = \frac{h}{\sin \theta} = \frac{4}{0.8} = 5 \text{ m}$$

اگر طول سطح شیب d باشد.

$$W_N = \vec{N} \cdot \vec{d} = Nd \cos(90) = 0$$

از رابطه $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$:

$$W_F = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos(0) = 186(5)(1) = 930 \text{ ج}$$

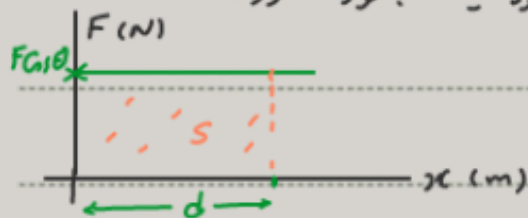
$$W_{f_k} = \vec{f}_k \cdot \vec{d} = f_k d \cos(180) = 36(5)(-1) = -180 \text{ ج}$$

$$W_{mg} = \vec{mg} \cdot \vec{d} = mgd \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = 150(5) \cos(143) = 750(-0.8) = -600 \text{ ج}$$

$$W_t = \Sigma W_i = 930 - 180 - 600 = 150 \text{ ج}$$

$$W_t = \Sigma \vec{F} \cdot \vec{d} = m\vec{a} \cdot \vec{d} = mad \cos(0) = 15(2)(5)(1) = 150 \text{ ج}$$

تغییر انرژی کار: اگر نمودار نیرو بر حسب مکان رسم شود، برای نیروی ثابت این متنی به صورت یک خط به درازات می‌رساند.



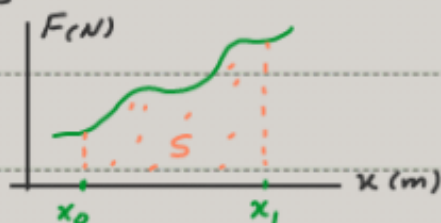
$$W = F d \cos \theta = S$$

ماده می‌شود که کار برابر است با سطح زیر نمودار، نیرو بر حسب مکان.

ب) کار نیروی متغیر: اگر نیرو متغیر باشد، یعنی تغییرات نیرو بر حسب مکان به صورت خط موازی می‌رساند، و این

متنی به هر شکلی باشد، کار برابر است با سطح زیر متنی.

از طرفی از نظر ریاضی، مساحت زیر متنی با انتگرال تابع بیان می‌شود.



$$W = S = \int_{x_0}^{x_1} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

در حالت کلی، اگر نیرو تابعی از x, y, z (سه بعد) باشد، مساحت نیز به بعدی می‌توان نوشت:

$$W = \int_{r_0}^{r_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x_1, y_1, z_1} \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{r}(x, y, z) = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x_1, y_1, z_1} F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

مثال ۴- فیزی که از قانون هوک پیروی می‌کند ($F = -kx$) که k ثابت فنر، x میزان کشیدگی یا فشرده‌گی فنر است.



از طول عادی به اندازه x_1 کشیده می‌شود، کار نیروی فنر چقدر است؟

$$W = \int_{x_0=0}^{x_1} F dx = \int_0^{x_1} -kx dx = -k \int_0^{x_1} x dx = -k \left(\frac{x^2}{2} \right)_0^{x_1} = -\frac{1}{2} k x_1^2$$

ماده می‌شود که کار فنر متنی است یعنی انرژی فنر هنگام کشیده شدن یک نیروی مقاوم است.

نکته: اگر فنر نسبت به طول عادی به اندازه x_1 فشرده شود، باز هم $W = -\frac{1}{2} k x_1^2$ است.

انرژی: بر اساس تعریف اولیه، انرژی یعنی توانایی انجام کار.

انواع انرژی: ۱- انرژی مکانیکی: انرژی مربوط به دستگاه فیزیکی در بعد ماکروسکوپی. ۲- انرژی غیر مکانیکی: انرژی مربوط به سطح داخلی مواد (بعد میکروسکوپی).

انواع انرژی مکانیکی (۵): ۱- انرژی جنبشی (K): انرژی جسم بواسطه سرعتش. $K = \frac{1}{2} m v^2$. ۲- انرژی پتانسیل (U): انرژی دستگاه فیزیکی به دلیل تغییر شکل دستگاه.

تعریف کار و انرژی: اصل کار، انجام شده روی جسم برابر است با تغییر انرژی جنبشی جسم. برای نیروی ثابت:

$$W_t = \sum \vec{F} \cdot d = m a d = m \left(\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} \right) d = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = K - K_0 = \Delta K$$

مثال ۵- جسم به جرم 4 kg که در مبدأ $x=0$ ساکن است، تحت تأثیر نیروی است که نمودار آن به شکل زیر است. سرعت جسم



در $x=10\text{ m}$ چقدر است؟

$$W = \Delta K$$

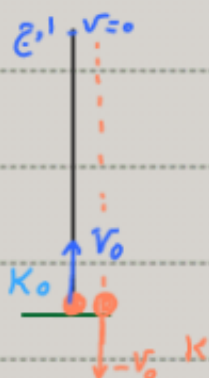
با استفاده از قضیه کار و انرژی:

$$W_{0 \rightarrow 10} = S_1 + S_2 - S_3 = 20 + 5 - 20 = 5\text{ J}$$

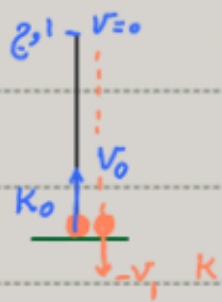
$$W = \Delta K \rightarrow 5 = \frac{1}{2}(4)v^2 - \frac{1}{2}(4)(0) \rightarrow v = \sqrt{\frac{10}{2}} = 2.24\text{ m/s}$$

پایستگی انرژی:

مثال ۶- گلوله ای به جرم m را از سطح زمین با سرعت اولیه v_0 در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می کنیم. کار انجام شده روی جسم را هنگامی که جسم دوباره به زمین می رسد، در دو حالت زیر محاسبه کنید.



الف) در شرایط خلا



ب) در شرایط واقعی

الف) در شرایط خلا: (بدون مقاومت هوا)

ب) در شرایط واقعی: (با مقاومت هوا)

الف) در شرایط خلا: گلوله با هر سرعتی به بالا پرتاب شود، در برگشت هنگام عبور از نقطه پرتاب، با همان سرعت و کما به پائین برمی گردد.

$$K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad K = \frac{1}{2}m(-v_0)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \rightarrow K = K_0$$

$$y = y_0 \rightarrow \Delta y = d = 0 \rightarrow \Delta K = K - K_0 = W = 0$$

مثله می شود که وقتی جایی صفر شده، کل کار انجام شده روی جسم نیز صفر است. نیرویی که در این مورد اثر می کند، نیروی گرانش (وزن) است.

ب) در شرایط معمولی (با مقاومت هوا): مشاهده می شود که مقاومت هوا در مدت حرکت گلوله، در مقابل حرکت خفایت

ایجاد کرده و این امر پس می شود که اولاً نقطه اوج گلوله نسبت به حالت قبل، پائین تر باشد و ثانیاً سرعت گلوله هنگام برگشت

$$\text{از نقطه پرتاب کمتر از سرعت اولیه باشد. } v_1 < v_0, \quad K = \frac{1}{2}m(-v_1)^2 = \frac{1}{2}mv_1^2, \quad K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

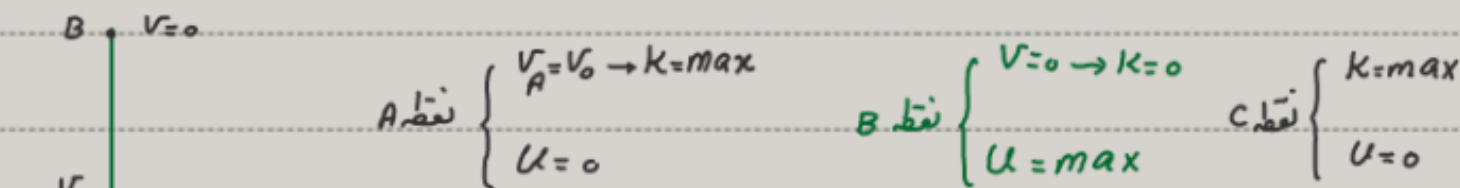
$$\Delta y = d = 0, \quad \Delta K = W = K - K_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 < 0$$

در این حالت، هتئای که جایی بی صفر شده، کار مخالف صفر است. نیروهای که اثر دارند مثل نیروی گرانش (وزن) و نیروی مقاوت هواست. با تابی دو حالت نتیجه می گیریم که آنچه باعث می شود در حالت دوم کار صفر نباشد، نیروی مقاوت هواست. به طور کلی نیروها را به دو گروه تقسیم می کنیم:

- ۱- نیروهای پایدار: نیروهای که کار آنها در یک مسیر بسته صفر است یا کار به مسیر بستگی ندارد بلکه تابع جایی (نقطه) ابتدا و انتها) است. مانند نیروی وزن - نیروی فنر - نیروی الکتریکی کولن و ...
- ۲- نیروهای ناپایدار: نیروهای که کار آنها در مسیر بسته صفر نیست یا کار تابع مسیر است.

مانند نیروی اصطکاک - مقاوت هوا - نیروی مقاوم - نیروی کشش تخی - نیروی عمودی سطح شیب

۲- انرژی پتانسیل (U): هائیکونه که متلاً بیان شد، انرژی پتانسیل مربوط به تغییر تعلق در دستگاه فیزیکی (مجموعه جسم و محیط) است و تنها مربوط به نیروی پایدار می باشد. انتظاری رود که هر چه تغییر تعلق دستگاه بیشتر باشد، تغییر در انرژی پتانسیل هم بیشتر باشد. به عنوان مثال در حالتی که طول را با سرعت در شرایط خلأ بطور قائم به بالا پرتاب می کنیم خواهیم داشت:



مث هده می شود که چون تنها نیروی موجود، نیروی گرانش یک نیروی پایدار است، تغییرات انرژی

پتانسیل و انرژی جنبشی مخالف هم هستند یعنی: $\Delta K = -\Delta U$

نتیج: ۱- $\Delta K = -\Delta U$

$$\left. \begin{matrix} W = \Delta K \\ \Delta U = -W = -\int_0^{r_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} \end{matrix} \right\} \rightarrow U = -\int_0^{r_1} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

با انتخاب صدهاء مناسب برای انرژی پتانسیل $U_0 = 0$ خواهیم داشت:

مثال ۷- انرژی پتانسیل برای یک فنر که نسبت به طول عادی به اندازه x_1 متراکم یا کشیده می شود، چدهاء است؟ در مثالهای قبل، کار فنر می سه شده و در اینجا قسم که فنر نسبت به طول عادی کشیده یا متراکم می شود، در هر دو صورت

$$W = -\frac{1}{2} k x_1^2$$
 ، بنابراین: $U = \frac{1}{2} k x_1^2$ فنر $U = -W = -(-\frac{1}{2} k x_1^2)$ فنر

صدهاء برای انرژی پتانسیل فنر، همیشه طول عادی آن است.

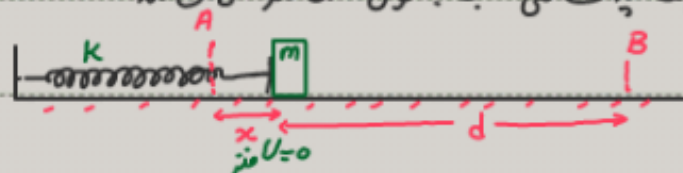
مثال ۸ - انرژی پتانسیل گرانشی را برای حالتی که جسم نسبت به یک نقطه فرضی به اندازه h بالا برود یا پائین برود، می‌سبب کند.
 هنگامی که جسم به اندازه h بالا می‌رود، نیروی وزن متضاد است و $W = -mgh$ وزن بنابراین $U = +mgh$
 هنگامی که جسم به اندازه h پائین رود، نیروی وزن محرک است و $W = +mgh$ وزن بنابراین $U = -mgh$
 مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی، هر نقطه فرضی می‌تواند باشد.

۲- ثابت $E = 0 \rightarrow \Delta E = 0 \rightarrow \Delta(K+U) = 0 \rightarrow \Delta K + \Delta U = 0 \rightarrow \Delta K = -\Delta U$
 اگرچه نیروی موجود در دستگاه، پایدار باشند، انرژی مکانیکی دستگاه ثابت است و این به معنی پایستگی انرژی مکانیکی است.

از آنجا که در هر دستگاه فیزیکی ممکن است نیروهای ناپایدار هم وجود داشته باشند بنابراین شکل پایستگی انرژی دارای تغییر زیر خواهد شد.
 $\Delta E = E_f - E_i = W_{nc}$
 در رابطه بالا W_{nc} به معنی کار نیروهای ناپایدار است. اگر $W_{nc} = 0$ رابطه به پایستگی انرژی مکانیکی منجر خواهد شد.
 مراحل حل مسائل:

- ۱- تشخیص نیروها از لحاظ پایدار و ناپایدار بودن.
 - ۲- تعیین مبدأ انرژی پتانسیل برای نیروهای پایدار وجود.
 - ۳- نوشتن انرژی مکانیکی (E) برای نقاط معلوم و مجهول ($E = K + U$).
 - ۴- استفاده از رابطه $\Delta E = W_{nc}$ و تعیین کمیت مجهول.
- باید دقت کنیم که معادله پایستگی انرژی یک معادله است و برای تعیین یک مجهول مناسب است. اگر تعداد مجهول‌ها بیشتر باشد باید معادلات دیگری نیز بیان شود.

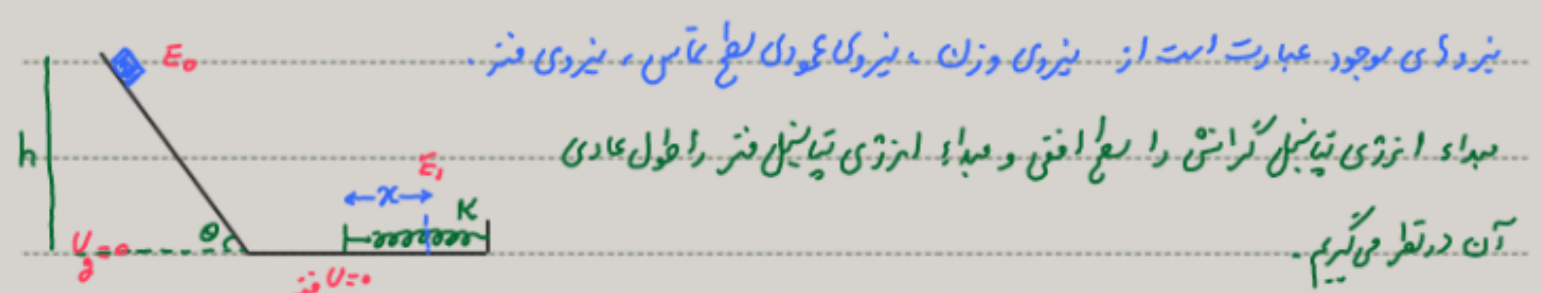
مثال ۹- جسمی به جرم 8 kg روی سطح افقی به ضریب اصطکاک $\mu = 0.4$ به فنری با سختی 1000 N/m تکیه داده شده است. نوک جسم فاصله 20 cm فاصله کرده و پس رها می‌کنیم. جسم قبل از توقف چه مسافتی نسبت به طول عادی فنر طی می‌کند.
 نیروها عبارتند از: وزن - عمودی سطح عمود - نیروی فنر و نیروی اصطکاک.



$$E_A = K_A + U_A = 0 + \frac{1}{2} k x^2, \quad E_B = K_B + U_B = 0 + 0$$

$$\Delta E = W_{nc} \rightarrow E_B - E_A = W_f \rightarrow 0 - \frac{1}{2} k x^2 = -\mu m g (d+x) \rightarrow 0 = 32 (d+x) \rightarrow d = 7.25 \text{ m}$$

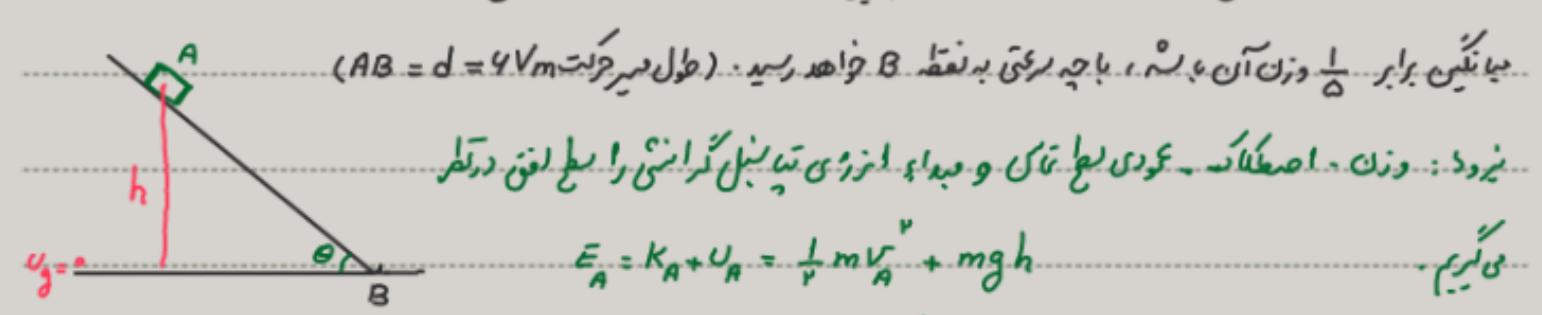
مثال ۱۰- از بالای سطح شیبدار بدون اصطکاک با شیب 37° جسی به جرم 10 kg شروع به حرکت می‌کند. قتری با ثابت 1000 N در پایین سطح شیبدار (روی سطح افقی) قرار دارد. اگر ارتفاع سطح شیبدار 1.8 m باشد، حداکثر تراکم قتر در هنگام برخورد جسم چقدر است؟



$$E_0 = K_0 + U_0 = 0 + mgh, \quad E_1 = K_1 + U_1 = 0 + \frac{1}{2} kx^2$$

$$\Delta E = W_{nc} = 0 \rightarrow E_0 = E_1 \rightarrow mgh = \frac{1}{2} kx^2 \rightarrow 180 = 500 x^2 \rightarrow x = 0.6 \text{ m}$$

مثال ۱۱- اتومبیل روی سطح شیبدار با زاویه 37° در حال پایین آمدن است. اگر سرعت اتومبیل در نقطه A برابر 12 m/s و نیروی اصطکاک میانکین برابر $\frac{1}{5}$ وزن آن باشد، با چه سرعتی به نقطه B خواهد رسید. (طول مسیر حرکت $AB = d = 47 \text{ m}$)



$$E_A = K_A + U_A = \frac{1}{2} m v_A^2 + mgh$$

$$E_B = K_B + U_B = \frac{1}{2} m v_B^2 + 0$$

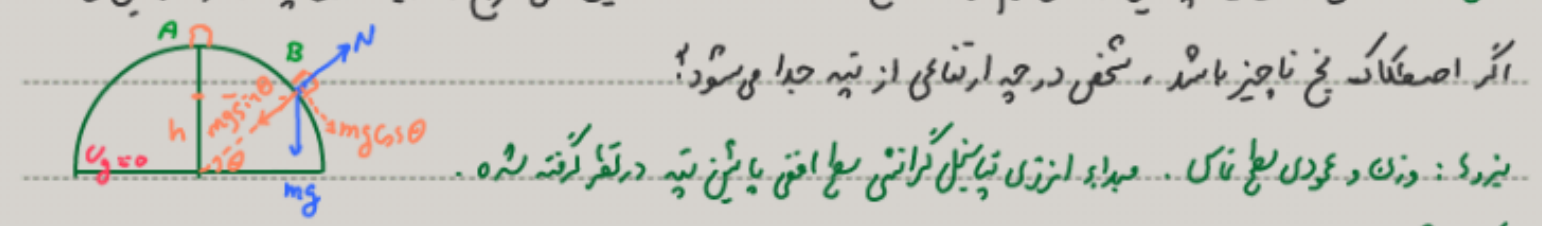
$$\sin \theta = \frac{h}{d} \rightarrow h = d \sin \theta = 47 \sin(37^\circ) = 47(0.6) = 28.2 \text{ m}$$

$$\Delta E = W_{nc} \rightarrow E_B - E_A = W_f \rightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 - mgh = -\frac{1}{5} mgd$$

$$v_B^2 - (12)^2 - (10)(28.2) = -4(47) \rightarrow v_B^2 = 1.44 + 282 - 188 = 135.44$$

$$v_B = \sqrt{135.44} = 11.64 \text{ m/s}$$

مثال ۱۲- شخصی بالای یک تپه یخی به شکل نیم کره به شعاع R نشسته است. این شخص شروع به لغزیدن روی تپه به طرف پایین می‌کند.



$$E_A = K_A + U_A = 0 + mgR, \quad E_B = K_B + U_B = \frac{1}{2} m v^2 + mgh$$

$$\Delta E = W_{nc} = 0 \rightarrow E_B = E_A \rightarrow \frac{1}{2} m v^2 + mgh = mgR$$

$$\Sigma F = m \frac{v^2}{R} \rightarrow mg \sin \theta - N = m \frac{v^2}{R} \xrightarrow{N=0} mg \sin \theta = m \frac{v^2}{R} \rightarrow v^2 = Rg \sin \theta$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = mgR \xrightarrow{v=Rg\sin\theta} \frac{1}{2}Rg\sin\theta + gh = gR \rightarrow \frac{1}{2}R\sin\theta + h = R$$

$$\leftarrow \sin\theta = \frac{h}{R} \quad \text{با توجه به شکل، ملاحظه می شود که}$$

$$\frac{1}{2}R\left(\frac{h}{R}\right) + h = R \rightarrow \frac{3}{2}h = R \rightarrow h = \frac{2}{3}R$$

مثال ۱۳- فتری با فریب سختی N/m به صورت قائم روی یک فنر قرار دارد و به اندازه m در فشرده شده و توی به جرم g روی آن قرار دارد. اگر فنر رها شود:

(الف) سرعت توی هنگامی که فتر به طول عادی می رسد، چقدر است؟

(ب) نسبت به طول عادی فتر، توی چقدر بالا می رود؟

نیروی عبارتند از: وزن - نیروی فنر.

مبدأ برای انرژی مکانیک فتر را طول عادی فتر و برای گرانش نقطه رها شدن

(تراکم فتر) اختیار می کنیم.

$$E_0 = K_0 + U_0 = 0 + \frac{1}{2}kx^2, \quad E_1 = K_1 + U_1 = \frac{1}{2}mv^2 + mgx$$

$$E_v = K_v + U_v = 0 + mg(h+x)$$

$$(الف) \quad \Delta E = W_{nc} = 0 \rightarrow E_0 = E_1 \rightarrow \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgx$$

$$150 \cdot (0.14) = \frac{1}{2} \cdot 3 v^2 + 4 \cdot (0.14) \rightarrow v^2 = \frac{134 - 0.56}{1.5} = 88.53 \rightarrow v = 9.41 \text{ m/s}$$

$$(ب) \quad \Delta E = W_{nc} = 0 \rightarrow E_0 = E_v \rightarrow \frac{1}{2}kx^2 = mg(h+x) \rightarrow$$

$$150 \cdot (0.14) = 4h + 4(0.14) \rightarrow h = 0.2125 \text{ m}$$

